

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018
المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم: جابر محمد

السؤال الأول (39 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن الحلقة $R = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ هي حقل بالنسبة للجمع والمضروب بالمقياس 15.

(2) إن حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حلقة الأعداد الصحيحة Z تحقق خاصية الاختصار.

(3) معزول حلقة الخارج $Z_{12}/3Z_{12}$ يساوي 12.

(4) إن $4Z/8Z$ مثلية في حلقة الخارج $2Z/8Z$.

(5) إن الحلقة $R = Z \oplus Z$ هي حلقة ثامة لأن Z حلقة ثامة.

(6) إن $3 + 6Z_{12}$ هو عنصر حاد في الحلقة $Z_{12}/6Z_{12}$.

(7) إن المثالية $\langle 4 \rangle$ أولية في الحلقة Z_{12} .

(8) إن المثالية $(3Z + 5Z)$ أعظمية في حلقة الأعداد الصحيحة Z .

(9) إن الحلقة $(Z_{10}, +, \cdot)$ حلقة موضعية.

(10) إذا كانت $A = 2Z$, $B = 6Z$ فإن $A \cap B = 3Z$.

(11) إذا كانت $R = Z_{10}$ فإن $J(R) = \langle 6 \rangle$.

(12) إذا كانت $A = \langle 6 \rangle$ مثلية في حلقة الأعداد الصحيحة Z فإن $\text{rad } A = \langle 3 \rangle$.

(13) إن المتعدنية $2x + 1 \in Z_4[x]$ هي حدودية أولية فوق Z_4 .

السؤال الثاني (45 درجة):

أثبت صحة ما يلي: لتكن R حلقة واحدة و A, B مثليتين في R .
(1) إن مركز الحلقة R $Z(R) = \{x : x \in R; ax = xa, \forall a \in R\}$ هو حلقة جزئية وواحدة في R .

(2) إذا كانت R تبديلية والمثليتان A, B تحققان $R = A + B$ فإن $A \cap B = A \cap B$.

(3) إذا كانت R تبديلية فإن $\text{rad } R \in J(R)$ حيث $J(R)$ هو أساس جاكسون في R .

(4) كل مثلية يسارية A متبعة القوى في الحلقة R لا تحتوي عناصر حادة معاكسة للصفر.

(5) إن أساس جاكسون $J(R)$ يكون مثلية يسارية صغيرة في R وهي أكبر مثلية يسارية صغيرة في الحلقة R .

السؤال الثالث (16 درجة):

إذا كانت R حلقة تبديلية و A, B مثليتين في R وكان

$\text{rad } A = \sqrt{A} = \{a : a \in R; \exists n \in \mathbb{Z}^+; a^n \in A\}$ أثبت صحة ما يلي:

(1) $\text{rad } A$ مثلية في R .

(2) إذا كانت $A = A$ أولية فإن $\text{rad } A = A$.

(3) إذا كانت $A = \langle 3 \rangle$, $B = \langle 5 \rangle$, $C = \langle 6 \rangle$ ثلاث مثليات في Z أوجد:

$$\text{rad}(A \cap C + A \cap B)$$

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. أيمن العوجة

(1) إله الحلقة $R = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ هي حقل بالنسبة للجمع والضرب بالمسا من 15. صواب أم لا.

mod 15	0	3	6	9	12
0	0	0	0	0	0
3	0	9	3	12	6
6	0	3	6	9	12
9	0	12	9	6	3
12	0	6	12	3	9

شرط الواسية $a \cdot 1 = a$

تلاحظ من الجدول أنه R واسية

وواحد حاصد 6

وهي تبديلية

وهي تامة لأنه لا يوجد $a \neq 0$

$a \cdot b = 0$ حيث $b \neq 0$

أي لا توجد عناصر للصفر

تامة

وهي منطقة تكاملية متناهية R هي حقل

(2) إله حلقة المصفوفات $M_2(\mathbb{Z})$ فوق حلقة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} تمتعت خاصية الانقضاء. صواب أم لا

خاصية الانقضاء تتمتع في المناطق التكاملية و $M_2(\mathbb{Z})$ تحتوي عناصر للصفر

وبالتالي ليست تامة وبالتالي ليست منطقة تكاملية $M_2(\mathbb{Z})$ لا تمتع خاصية الانقضاء

$$\{M_2(\mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \neq 0 \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(3) إله حلقة المصفوفات $M_2(\mathbb{Z}_{12})$ هي حقل. صواب أم لا

$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, \dots, 11\}$

$$\frac{\mathbb{Z}_{12}}{3\mathbb{Z}_{12}} = \{0 + 3\mathbb{Z}_{12}, 1 + 3\mathbb{Z}_{12}, \dots, 11 + 3\mathbb{Z}_{12}\}$$

نوجه العاصد وهو $1 + 3\mathbb{Z}_{12}$

شرط الميز $n \cdot 1 = 0$; $n \neq 0$

$$1. 1 + 3\mathbb{Z}_{12} \leq 1 + 3\mathbb{Z}_{12}$$

$$2. 1 + 3\mathbb{Z}_{12} \leq 2 + 3\mathbb{Z}_{12}$$

$$\dots 12. 1 + 3\mathbb{Z}_{12} \leq 12 \bmod 12 + 3\mathbb{Z}_{12} \leq 0 + 3\mathbb{Z}_{12}$$

الميز هو 12

4. $\frac{4z}{8z}$ مكافئ في حلقة الخارج $\frac{2z}{8z}$ صحيح لأنه

صحيح لأنه $\frac{4z}{8z}$ مكافئ $\frac{2z}{8z}$ يجب أن نتحقق شرطين

(1) $2z$ مكافئ $4z$ ولتحقق من ذلك $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8 \in 2z \Rightarrow$ $2z$ مكافئ $4z$

(2) $4z$ يقسم $8z$ ولتحقق من ذلك وهو تقويم واضح $\frac{4z}{8z}$ مكافئ $\frac{2z}{8z}$ حلقة الخارج $\frac{2z}{8z}$

(5) إثبات الحلقة $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ هي حلقة تامة لأنه حلقة تامة
خطأ لأنه $R \ni (1,0) \neq (0,1)$

$(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$

R متوحد قواسم للصفر \Rightarrow ليست تامة

(6) إثبات $3+6\mathbb{Z}_{12}$ هو عنصر جامع في الحلقة $\frac{\mathbb{Z}_{12}}{6\mathbb{Z}_{12}}$ صحيح لأنه

$$(3)^2 + 6\mathbb{Z}_{12} = 9 + 6\mathbb{Z}_{12}$$

$$= 3 + 6\mathbb{Z}_{12}$$

$\Leftarrow 3+6\mathbb{Z}_{12}$ هو عنصر جامع في الحلقة $\mathbb{Z}_{12}/6\mathbb{Z}_{12}$

(7) إثبات المكافئ $(3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z})$ أعظمية في حلقة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z}

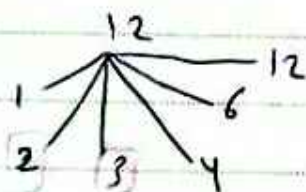
$$3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z} = \gcd(3,5)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

خطأ لأنه وللتأكد الباعثية لا يجب أن نأري الحلقة نظراً

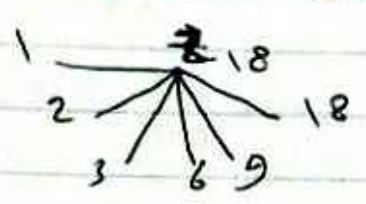
(8) إثبات المكافئ $\langle 4 \rangle$ أولية في الحلقة \mathbb{Z}_{12}

خطأ لأنه المثاليات الأعظمية في \mathbb{Z}_{12}

هي $\langle 2 \rangle$ و $\langle 3 \rangle$



(9) إنه الحلقة $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ حلقة موصفة خطأ لأن



الحلقة الموصفة هي من تلك ما يلي أنظري
واحد فقط

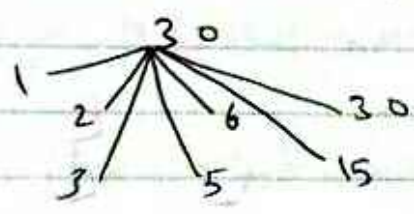
و \mathbb{Z}_{18} تلك ~~حلقة~~ أكثر من مثالي أمثلي راصه
نبي تلك $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle$

(10) إذا كانت $B = 6\mathbb{Z}$ و $A = 2\mathbb{Z}$ مثاليتين في \mathbb{Z} فإنه $A : B = 3\mathbb{Z}$ خطأ لأنه

بما أنه A, B مثاليتين في \mathbb{Z} و \mathbb{Z} موصفة فإنه يجب أنه
يتحقق أن $A : B = A$

$$\Rightarrow A : B = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$$

(11) إذا كانت $R = \mathbb{Z}$ فإنه $J(R) = \langle 6 \rangle$ خطأ لأنه



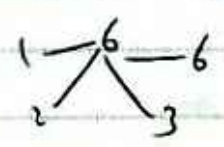
$J(R)$ هو تقاطع المثاليات الأولية في \mathbb{Z}

$$J(R) = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle \cap \langle 5 \rangle$$

$$= \text{ICM}(2, 3, 5)$$

$$= 30 \bmod 30 = 0 \neq \langle 6 \rangle$$

(12) إذا كانت $A = \langle 6 \rangle$ مثالية في طلبة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} فإنه $\text{rad } A = \langle 3 \rangle$ خطأ لأنه



$\text{rad } A$ هو تقاطع المثاليات الأولية في $\langle 6 \rangle$

$$\text{rad } A = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle$$

$$= \text{ICM}(2, 3) = \langle 6 \rangle \neq \langle 3 \rangle$$

(13) إنه الحلقة $\mathbb{Z}_4[x]$ $2x+1 \in \mathbb{Z}_4[x]$ عددية أولية منتهية \mathbb{Z}_4

صحيح لأنه $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $f(x) = 2x+1$

$$f(0) = 2(0)+1 = 1 \neq 0$$

$$f(1) = 2(1)+1 = 3 \neq 0$$

$$f(2) = 2(2)+1 = 5 \bmod 4 = 1 \neq 0$$

$$f(3) = 2(3)+1 = 7 \bmod 4 = 3 \neq 0$$

\Rightarrow عددية منتهية \mathbb{Z}_4
كأنها لم تكن أي غير

موزاييك